数理解析研究所講究録
313巻 1977年 126-136

Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems II

名大 教養部　池上宜弘

§1. はじめに

Periodic time dependent dynamical system (以後, これを periodic system と呼ぶ) が $\tilde{\Omega}w$-stable である為の必要条件を[2]で示したが, 本論では, この必要条件に近い条件が十分条件にもなる事を示す. 以後, M はなめらかな compact 多様体とする.

§2. 主な定義

M上の C^r級 periodic system とは, 次の形の方程式である.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

但し, f は $f(x, t+1) = f(x)$ をみたす C^r級関数である. M 上の C^r級の periodic system 全体の集合を $\mathbb{P}^r(M \times \mathbb{R})$ で表わす. (*)は, 次の様な $M \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場(自励系) X に対応する.

$$X_{(x,t)} = (f(x,t), 1) \in T_x(M) \times T_t(\mathbb{R}) \approx T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}).$$

$M\times\mathbb{R}$ 上の vector 場として，一様 C^r 位相を入れることにより，$\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ は位相空間となる．自励系 X の flow を

$$\Phi_X : (M\times\mathbb{R})\times\mathbb{R} \longrightarrow M\times\mathbb{R}$$

とする．$\pi : M\times\mathbb{R}\to M$ を自然な射影とするとき，

$$\varphi_X(x_0, t_0, \cdot) = \pi\Phi_X(x_0, t_0, \cdot) : \mathbb{R}\to M$$

が，$(x, t) = (x_0, t_0)$ を初期条件とする periodic system $(*)$ の解である．$\Phi_X(x_0, t_0, \mathbb{R})$ 又は $\varphi_X(x_0, t_0, \mathbb{R})$ を各々，periodic system X の $M\times\mathbb{R}$ 上又は M 上の<u>軌跡</u>という．$\varphi(x_0, t_0, \cdot)$ が<u>周期解</u>であるとは，$\sigma\neq 0$ が存在して，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\varphi(x_0, t_0, t+\sigma) = \varphi(x_0, t_0, t)$ が成立することである．

$\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$ を，$M\times S^1$ 上の自励系全体に C^r 位相を入れた空間とする．$X\in\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ に対して，$\bar{X}\in\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$ が次の様に対応する．但し，$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である．$\rho : M\times\mathbb{R}\to M\times S^1$ を $\rho(x, t) = (x, [t])$ により定義するとき，

$$\bar{X}_{(x,[t])} = (f(x,t),\ 1) \in T_x(M)\times T_{[t]}(S^1) = T_{\rho(x,t)}(M\times S^1).$$

X は周期 1 を持つから，$\bar{X}$ は矛盾なく定義される．

$$\mathfrak{X}^r_1(M\times S^1) = \{\bar{X}\in\mathfrak{X}^r(M\times S^1) \mid \bar{X}_{(x,s)} \text{ の } T_s(S^1) \text{ 成分} = 1\}$$

を $\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$ の部分空間とする．$\rho_*(X) = \bar{X}$ として，写像 $\rho_* : \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{X}^r_1(M\times S^1)$ が得られる．ρ_* は同相写像である．$\Phi_{\bar{X}}$ を $\bar{X}$ の流れとし，自然な射影 $M\times S^1\longrightarrow M$ をやはり π で表わすとき，

$$\pi\Phi_X(x, s, t) = \varphi(x, s, t) = \pi\Phi_X(x, [s], t)$$

が成立する．$P_X(x) = \varphi_X(x, 0, 1)$ で定義される C^r 級微分同相写像 $P_X : M \to M$ を X の Poincaré map という．

定義1．次の条件をみたす点 $x \in M$ を X 又は周期系(*)の wandering point という．任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して，x の開近傍 $U \subset M$ と自然数 n が存在して，$|t| > n$ なる任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\varphi_X(U, t_0, t) \cap U = \phi$$

が成立する．wandering point でない点 $x \in M$ を non-wandering point という．non-wandering point 全体の集合を non-wandering set といい，$\omega(X)$ であらわす．

次の条件をみたす $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$ 全体の集合を $\tilde{\Omega}(X)$ とする；(x, t) の任意の開近傍 $U \subset M \times \mathbb{R}$ と任意の自然数 n に対して，$|m| > n$ なる整数 m が存在して，$U_m \cap \Phi_X(U_0, m) \neq \phi$ となる．但し，$U_m = \{(y, s+m) \mid (y, s) \in U\}$ とする．一方，$M \times S^1$ 上の自励系 $\bar{X}$ の non-wandering set を $\Omega(\bar{X})$ で表す．

命題1．$\rho_*(X) = \bar{X}$ とするとき，次が成立する．

(i) $\tilde{\Omega}(X) = \rho^{-1}(\Omega(\bar{X}))$．従って $\tilde{\Omega}(X)$ は X の不変集合である．

(ii) $\omega(X) = \pi(\tilde{\Omega}(X)) = \pi(\Omega(\bar{X}))$．（以後 $\omega(\bar{X}) = \pi(\Omega(\bar{X}))$ とする．）

(iii) $\omega(X) \subset M$ と $\tilde{\Omega}(X) \subset M \times \mathbb{R}$ は閉集合である．

定義2．$X, Y \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ が $\tilde{\Omega}\omega$-equivalent であるとは，

同相写像 $h : \tilde{\Omega}(X) \to \tilde{\Omega}(Y)$ と $h_0 : \omega(X) \to \omega(Y)$ が存在して，次の条件をみたすことである．

(i) h は $X|\tilde{\Omega}(X)$ と $Y|\tilde{\Omega}(Y)$ の topological equivalence．

(ii) $h_0 \circ \pi = \pi \circ h$．

(iii) h は時間に対して，周期1を持つ．即ち，$\pi_R : M \times R \to R$ を自然な射影とするとき，

$$h(x, t+1) = (\pi h(x,t),\ \pi_R h(x,t) + 1) \in M \times R.$$

命題 2．X, Y が $\tilde{\Omega}\omega$-equivalent ならば，$(x, t_0) \in \tilde{\Omega}(X)$ に対し，$\omega(X)$ に含まれる軌跡 $\varphi_X(x, t_0, R)$ の h_0 による像は $\omega(Y)$ の1つの軌跡 $\varphi_Y(y, s_0, R)$ となる．

定義 3．$\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}_1^r(M \times S^1)$ が $\Omega\omega$-equivalent であるとは，同相写像 $h : \Omega(\bar{X}) \to \Omega(\bar{Y})$ と $h_0 : \omega(\bar{X}) \to \omega(\bar{Y})$ が存在して，次の条件をみたすことである．

(i) 次の条件を持つ isotopy $H_s : \Omega(\bar{X}) \to \Omega(\bar{Y})$，$s \in I$ が存在する．但し，$M_0 = M \times [0] \subset M \times S^1$ とする．

(a) $H_0 = h$，$H_1(\Omega(\bar{X}) \cap M_0) = \Omega(\bar{Y}) \cap M_0$．即ち，$H_1$ は，cross-section M_0 を M_0 にうつす．

(b) 任意の $s \in I$ に対して，H_s は $\bar{X}|\Omega(\bar{X})$ と $\bar{Y}|\Omega(\bar{Y})$ の topological equivalence である．

(ii) $\pi \circ h = h_0 \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} \Omega(\bar{X}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega(\bar{Y}) \arrow[d, "\pi"] \\ \omega(\bar{X}) \arrow[r, "h_0"] & \omega(\bar{Y}) \end{tikzcd}$$

<u>命題</u>3. XとYが$\tilde{\Omega}\omega$-equivalent. $\Longleftrightarrow$ $\bar{X}$と$\bar{Y}$が$\Omega\omega$-equivalent.

<u>定義</u>4. $X \in \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$が <u>$C^r\tilde{\Omega}\omega$-stable</u>であるとは，$X$の近傍$N\subset\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$が存在して，任意の$Y\in N$は$X$と$\tilde{\Omega}\omega$-equivalent であることである．同様に，$\bar{X}\in\mathfrak{X}^r_1(M\times S^1)$に対して，<u>$C^r\Omega\omega$-stable</u> であることが定義される．又，$\bar{X}$が<u>$C^r\Omega$-stable</u>というのは，良く知られている意味で使う．

<u>命題</u>4. $X\in\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$が$\tilde{\Omega}\omega$-stable. $\Longleftrightarrow$ $\bar{X}\in\mathfrak{X}^r_1(M\times S^1)$が，$\Omega\omega$-stable.

§3. $\tilde{\Omega}\omega$-stabilityの必要条件.

本論の目的は，Xが$\tilde{\Omega}\omega$-stableである為の条件を示すことであるが，これに関連して，transversal condition ともいうべき$\Omega(\bar{X})$に関する次の条件を掲げておく．

G(1)　$\Omega(\bar{X})$に含まれる任意の軌道γに対して，$\pi|\gamma:\gamma\to M$は正則写像である．

G(2)　$\dim M\geqq 3$のとき，次の$G'(2)$がみたされ，$\dim M=2$のとき，次の$G''(2)$がみたされる．

$G'(2)$　実数$K>0$が存在して，$\Omega(\bar{X})$に含まれる任意の異なる2点(x,s)，(y,t)に対して，

$$d(x,y)>K\cdot d'(s,t).$$

G''(2)　実数 $K>0$ が存在して，$\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の相異なる3点 $(x, s), (y, t), (z, u)$ に対して，次の少くとも1つの式が成立する．

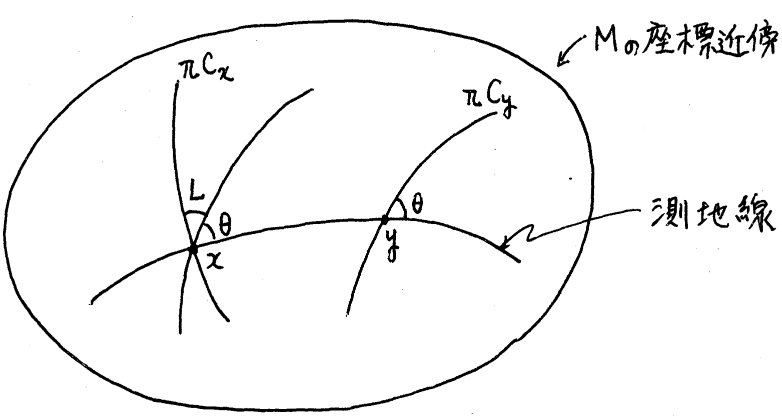
$$d(x, y) > K\cdot d'(s, t)$$
$$d(y, z) > K\cdot d'(t, u)$$
$$d(z, x) > K\cdot d'(u, s).$$

但し，d と d' は各々 M と S^1 上の距離とする．

G(3)　$\dim M = 2$ のとき，$\varepsilon>0$ と $\theta>0$ が存在して，$\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる2点 $(x, s), (y, t)$ に対して，

$$d(x, y) < \varepsilon\cdot d'(s, t)$$
$$\Longrightarrow \quad \angle((x, s), (y, t)) > \theta\cdot d'(s, t)$$

が成立する．但し，$\angle$ は次のように与えられるものである．$(x, s), (y, t)$ を通る軌跡に含まれていて，$(x, s), (y, t)$ を含む線分を各々，C_x, C_y とするとき，M 上の曲線，$\pi C_x, \pi C_y$ の x, y に於ける角度が $\angle((x, s), (y, t))$ である．ここに，M の Riemannian metric は任意に固定されているものとする．



$d'(s,t)<1$, 従って $d(x,y)<\varepsilon$ より, $\angle$ の定義は意味を持つ.

$G'(3)$　$\varepsilon>0$ と $\theta>0$ が存在して, $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる 2点 (x,s), (y,t) に対して

$$d(x,y)<\varepsilon$$
$$\Longrightarrow \quad \angle((x,s),(y,t)) > \theta$$

が成立する.

<u>命題</u> 5.

$G'(2) \Longrightarrow \pi:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$ の 2 重点は存在しない.

$G''(2) \Longrightarrow \pi:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$ の 3 重点は存在しない.

$G(3) \Longrightarrow \pi:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$ の 2 重点に於て, 軌跡の π による像は横断的に交わる.

$G'(3) \Longrightarrow G(3)$.

<u>定理</u> 1. $X\in \mathcal{P}^1(M\times\mathbb{R})$ が $C^1\tilde{\Omega}\omega$-stable (即ち, $\bar{X}$ が $C^1\Omega\omega$-stable) ならば, 次の (i), (ii) が成立する.

(i) $\bar{X}$ は $C^1\Omega$-stable である.

(ii) $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$ が満たされる.

この定理は, $G(3)$ の代りに, 「軌跡の π による像は, 横断的である.」という, 少し弱い形で [2] に示されている. これは, $\tilde{\Omega}\omega$-stable になる為の必要条件であるが, 次の節で十分条件を示す.

§4. $\tilde{\Omega}w$-stabilityの十分条件

定義4. M^m, N^nを各々，m次元，n次元の微分可能多様体とする．M^mの部分集合Λに対して，写像$f:\Lambda\longrightarrow N^n$が，点$x\in M^m$に於て微分可能であるとは，線型写像$\lambda_x:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$が存在して，$x$と$f(x)$の局所座標を$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$と考えて，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-\lambda_x(h)\|}{\|h\|}=0 \qquad (h\in\mathbb{R}^m)$$

が成立することである．導関数$x\longmapsto\lambda_x$が連続であるとき，fはC^1-級であるという．

以後，Λはcompactとする．fがC^1-級ならば，fはΛの開近傍上のC^1級写像に拡張できる．

命題6. $C^1(\Lambda, N)$をC^1-写像$f:\Lambda\to N$全体の集合にC^1-位相を入れた空間とすると，$C^1(\Lambda, N)$はBanach空間となる．

定義5. fをM上のC^2級微分同相写像とし，Λをfの閉不変集合とする．ΛがC^1級双曲型集合であるとは，C^1級の双曲型直和分解

$$T_\Lambda(M)=E^s_\Lambda\oplus E^u_\Lambda$$

で，fに対して不変なものが存在することである．

命題7. (Hirsch-Pugh [1]) $\dim M=2$とするとき，$f\in\mathcal{D}^2(M)$の双曲型集合Λが，C^2級部分多様体ならば，ΛはC^1級双曲型集合である．

ここに，$\mathcal{D}^2(M)$ は，M 上の C^2 級微分同相写像全体の集合に C^2 位相を入れたものである．

<u>命題</u>8．$f \in \mathcal{D}^2(M)$ とし，Λ を f の C^1 級双曲型集合とする．このとき，恒等写像の任意の近傍 $N_1 \subset C^1(\Lambda, M)$ に対して，次のような f の近傍 $N_2 \subset \mathcal{D}^2(M)$ が存在する．

$$\forall g \in N_2,\ \exists h \in N_1,\quad g \circ h = h \circ f.$$

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\ h(\Lambda) \arrow[r, "g"'] & h(\Lambda) \end{tikzcd}$$

<u>命題</u>9．$h \in C^1(\Lambda, M)$ が十分に恒等写像に近ければ，h はいくらでも1に近い Lipschitz constant を持つことができる．

<u>定義</u>6．M 上の C^2 級微分同相写像 f が次の条件を満たすとき，f は <u>Axiom C^1A</u> を満たすという．

(a) $\Omega(f)$ は C^1 級双曲型集合である．

(b) $\Omega(f)$ の中に f の周期点は稠密に存在する．

次の定理は主定理である．

<u>定理</u>2．$X \in P^2(M \times R)$ が次の条件をみたすとする．

(i) X の Poincaré map $P_X : M \to M$ は Axiom C^1A と no-cycle property を持つ．

(ii) $\Omega(\bar{X})$ は $G(1)$, $G(2)$, $G'(3)$ の条件をみたす.

すると, X は C^2 $\tilde{\Omega}w$-stable である.

問題 $G'(3)$ の代りに $G(3)$ の仮定のもとで, 定理2は成立しないか?

定理2を使うことにより, $\Omega(\bar{X})$ の中に周期軌道以外の軌道を含む様な周期系 X で $\tilde{\Omega}w$-stable であるものを作ることができる.

$\Omega(\bar{X})$ が周期軌道のみから成る場合は, 次の様に X が $\tilde{\Omega}w$-stable になるための必要十分条件が求まる.

定理3. $X \in P^1(M \times R)$ とし, $\tilde{\Omega}(X)$ が有限個の軌道しか含まない場合, X が以下の全ての条件をみたすことが, X が $\tilde{\Omega}w$-stable である為の必要十分条件となる.

(i) Poincaré map p_X の周期点は双曲型で, p_X は no-cycle property をみたす.

(ii) $\gamma \subset \Omega(\bar{X})$ に対して, $\pi|\gamma$ は正則写像. (γ は軌道とする.)

(iii) $\dim M \geqq 3$ のとき, $\pi|\Omega(\bar{X})$ は2重点を持たない.

$\dim M = 2$ のとき, $\pi|\Omega(\bar{X})$ は3重点を持たない.

(iv) $\dim M = 2$ のとき, $\pi|\Omega(\bar{X})$ の交わりは全て横断的である.

文　献

[1]　M. W. Hirsch－C. C. Pugh, Stable manifolds for hyperbolic sets, Bull. A. M. S., (1969), 149－152.

[2]　池上宜弘, Stability of periodic time dependent dynamical systems, 京都大学数理解析研究所講究録 284, 1976年10月, 64－78.